

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024
MATEMATIKA
za I razred srednje škole

1. a) Odrediti A i B tako da važi $-x^2 + 2024x = -(x - A)^2 + B^2$.
b) Naći maksimum proizvoda $(2024 - x)(2024 - y)$, ako je $x + y = 2024$.
2. Odrediti sve proste brojeve p, q takve da je

$$\frac{p^p + pq + q^q}{p + q}$$

prirodan broj.

3. Za telefonski broj $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ kažemo da je *lak* ukoliko je $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ ili $d_1d_2d_3 = d_5d_6d_7$.
Koliko ima *lakah* telefonskih brojeva, ukoliko je dozvoljeno koristiti sve cifre?
4. Na stranici AB u trouglu ABC nalaze se tačke P_1, P_2, P_3 tako da važi:

$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3B| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Kroz ove tačke su povučene prave paralelne sa stranicom BC i one dijele trougao na četiri dijela.
Površina dijela koji se nalazi između pravih kroz tačke P_2 i P_3 iznosi 5. Kolika je površina trougla ABC ?

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. a) Odrediti A i B tako da važi $-x^2 + 2024x = -(x - A)^2 + B^2$.
b) Naći maksimum proizvoda $(2024 - x)(2024 - y)$, ako je $x + y = 2024$.

Rješenje:

a) Iz $-x^2 + 2024x = -x^2 + 2Ax + B^2 - A^2$ slijedi da je $2A = 2024$ i $B^2 = A^2$. Odatle dobijamo da je $A = 1012$ i $B = \pm 1012$.

b) Koristeći uslov $x + y = 2024$, proizvod čiji maksimum tražimo se svede na

$$(2024 - x) \cdot x.$$

Dakle, treba odrediti $x \in \mathbf{R}$ tako da vrijednost izraza

$$-x^2 + 2024x$$

bude najveća. Iz prvog dijela zadatka imamo da je $-x^2 + 2024x = -(x - 1012)^2 + 1012^2$, pa se najveća vrijednost dobija kada se od 1012^2 oduzima nula, odnosno kada je $(x - 1012)^2 = 0$, tj. $x = 1012$. Dakle, najveća vrijednost izraza je 1012^2 i dostiže se za $x = y = 1012$.

2. Odrediti sve proste brojeve p, q takve da je

$$\frac{p^p + pq + q^q}{p + q}$$

prirodan broj.

Rješenje:

Primijetimo da p, q ne mogu istovremeno biti neparni, jer bi u tom slučaju brojilac bio neparan, a imenilac paran broj. Zbog simetričnosti, možemo pretpostaviti da je q paran broj, odnosno $q = 2$. U tom slučaju, tražimo prost broj p takav da je

$$\frac{4 + 2p + p^p}{p + 2} = 2 + \frac{p^p}{p + 2}$$

prirodan broj. Neophodno i dovoljno je da $(p + 2) \mid p^p$. Kako su djelci broja p^p oblika p^k za $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, to je $p + 2 = p^k$, za $0 \leq k \leq p$. Sa druge strane, važi sljedeći niz nejednakosti

$$p < p + 2 \leq p + p = 2p \leq p^2,$$

pri čemu jednakosti važe samo za $p = 2$. Dakle, za $p > 2$ broj $p + 2$ se nalazi između p i p^2 , pa kao takav ne može biti djelilac broja p^p . Zaključujemo da je $p = 2$. Slijedi da par $(p, q) = (2, 2)$ zadovoljava uslov zadatka i predstavlja jedino rješenje.

3. Za telefonski broj $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ kažemo da je *lak* ukoliko je $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ ili $d_1d_2d_3 = d_5d_6d_7$. Koliko ima *lakah* telefonskih brojeva, ukoliko je dozvoljeno koristiti sve cifre?

Rješenje:

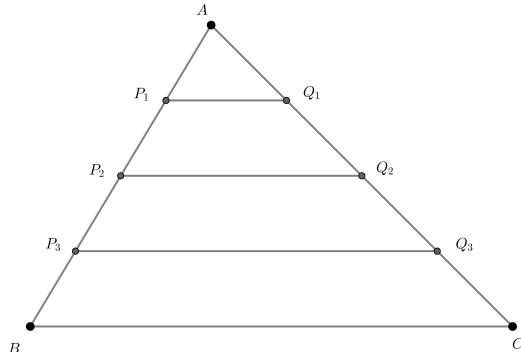
Za izbor $d_4d_5d_6d_7$, na osnovu principa proizvoda, imamo ukupno 10^4 mogućnosti. U slučaju da je $d_4 = d_5 = d_6 = d_7$, tada *lakah* brojeva ima 10. U suprotnom, za izbor $d_4d_5d_6d_7$ tako da ne važi $d_4 = d_5 = d_6 = d_7$ imamo preostalih $10^4 - 10$ mogućnosti. U tom slučaju neće važiti ni $d_4d_5d_6 = d_5d_6d_7$. Kako bi broj bio *lak*, za izbor $d_1d_2d_3$ imamo dvije mogućnosti: ili $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ ili $d_1d_2d_3 = d_5d_6d_7$. To nas dovodi do rezultata $2 \times (10^4 - 10)$. Dakle, *lakah* brojeva ovog formata ima $10 + 2 \times (10^4 - 10) = 19990$.

4. Na stranici AB u trouglu ABC nalaze se tačke P_1, P_2, P_3 tako da važi:

$$|AP_1| = |P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3B| = \frac{1}{4}|AB|.$$

Kroz ove tačke su povučene prave paralelne sa stranicom BC i one dijele trougao na četiri dijela. Površina dijela koji se nalazi između pravih kroz tačke P_2 i P_3 iznosi 5. Kolika je površina trougla ABC ?

Rješenje:



Kako je $\triangle ABC \sim \triangle AP_1Q_1 \sim \triangle AP_2Q_2 \sim \triangle AP_3Q_3$ i $|AB| = 4|AP_1|$, to je

$$P_{\triangle ABC} = 16P_{\triangle AP_1Q_1}.$$

Kako je $|AP_2| = 2|AP_1|$, to je

$$P_{\triangle AP_2Q_2} = 4P_{\triangle AP_1Q_1},$$

a kako je $|AP_3| = 3|AP_1|$, to je

$$P_{\triangle AP_3Q_3} = 9P_{\triangle AP_1Q_1}.$$

Iz uslova zadatka se dobija da je $4P_{\triangle AP_1Q_1} + 5 = 9P_{\triangle AP_1Q_1}$, odnosno $P_{\triangle AP_1Q_1} = 1$. Zato je

$$P_{\triangle ABC} = 16.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024
MATEMATIKA
za II razred srednje škole

1. Ako kvadratna jednačina

$$x^2 + ax + b = 0$$

ima cijelobrojna rješenja, dokazati:

- a) koeficijenti a i b su cijeli brojevi;
b) za svaki $k \in \mathbf{N}$, jednačina

$$x^2 + (2k + 1)ax + (k^2 + k)a^2 + b = 0$$

ima takođe cijelobrojna rješenja.

2. Bračni par Ana i Marko pozivaju svoje prijatelje, tri bračna para na večeru. Svi na večeru stižu istovremeno i neki od njih se međusobno rukuju, pri čemu se niko nije rukovao sa svojim supružnikom. Kada su sjeli za sto, Marko je pitao svakog od njih, uključujući i Anu, sa koliko su se ljudi rukovali. Dobio je 7 različitih odgovora. Sa koliko se ljudi rukovala Ana?
3. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da važi

$$a^2 + ab + b^2 = c^2$$

i $\text{nzd}(a, b, c) = 1$. Dokazati da su svi djeloci broja c (osim jedinice) veći od 5.

4. U trouglu ABC simetrala ugla $\angle ACB$ siječe stranicu AB u tački D . Ako je $|CB| = |CD|$, $|AD| = 4$ i $|BD| = 3$, odrediti $|AC|$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024
Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za II razred srednje škole

1. Ako kvadratna jednačina

$$x^2 + ax + b = 0$$

ima cijelobrojna rješenja, dokazati:

- a) koeficijenti a i b su cijeli brojevi;
- b) za svaki $k \in \mathbf{N}$, jednačina

$$x^2 + (2k + 1)ax + (k^2 + k)a^2 + b = 0$$

ima takođe cijelobrojna rješenja.

Rješenje:

a) Neka su x_1 i x_2 (cijelobrojna) rješenja jednačine $x^2 + ax + b = 0$. Tada, na osnovu Vietovih formula važi

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 \cdot x_2 = b,$$

pa su a i b cijeli brojevi.

b) Kako su

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

cijeli brojevi, iz rezultata a) zaključujemo da je $\sqrt{a^2 - 4b}$ takođe cio broj i da su $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ parni brojevi.

Rješenja jednačine

$$x^2 + (2k + 1)ax + (k^2 + k)a^2 + b = 0$$

su

$$\frac{-(2k + 1)a \pm \sqrt{(2k + 1)^2 a^2 - 4(k^2 + k)a^2 - 4b}}{2},$$

odnosno

$$\frac{-(2k + 1)a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}. \tag{1}$$

Iz dokazanog za jednačinu $x^2 + ax + b = 0$ slijedi da su $-(2k + 1)a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$ cijeli brojevi i to parni jer se od parnih brojeva $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$, respektivno, razlikuju za paran broj $-2ka$. Odavde slijedi da su rješenja data sa (1) takođe cijeli brojevi, što je trebalo dokazati.

2. Bračni par Ana i Marko pozivaju svoje prijatelje, tri bračna para na večeru. Svi na večeru stižu istovremeno i neki od njih se međusobno rukuju, pri čemu se niko nije rukovao sa svojim supružnikom. Kada su sjeli za sto, Marko je pitao svakog od njih, uključujući i Anu, sa koliko su se ljudi rukovali. Dobio je 7 različitih odgovora. Sa koliko se ljudi rukovala Ana?

Rješenje:

Kako je Marko dobio 7 različitih odgovora, a maksimalan broj rukovanja po osobi je 6, to je Marko dobio odgovore 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Neka se osoba A_1 rukovala sa 6 osoba. To nije Ana, jer tada među gostima ne bi postojala osoba sa 0 rukovanja. Osoba A_1 se rukovala sa svima osim sa svojim supružnikom, pa je njen supružnik, A_2 , osoba koja se nije rukovala ni sa kim, jer svi ostali prisutni moraju imati makar jedno rukovanje. Dalje, neka se osoba B_1 rukovala sa 5 osoba. Opet, to nije Ana jer tada ne bi postojala osoba koja je imala jedno rukovanje. Osoba B_1 se nije rukovala sa svojim supružnikom i sa A_2 , pa slijedi da se njen supružnik, B_2 , rukovao sa jednom osobom, jer inače ne bi postojala osoba koja ima tačno jedno rukovanje. Dalje, neka se osoba C_1 rukovala 4 puta. Istim rezonom zaključujemo da C_1 nije Ana i da se supružnik osobe C_1 rukovao dva puta, što nas dovodi do zaključka da se Ana rukovala 3 puta.

3. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da važi

$$a^2 + ab + b^2 = c^2$$

i $\text{nzd}(a, b, c) = 1$. Dokazati da su svi djeloci broja c (osim jedinice) veći od 5.

Rješenje:

Primijetimo da su brojevi a, b, c uzajamno prosti u parovima. Naime, npr. ako je p prost djelilac brojeva a i b , onda je p djelilac broja c^2 , pa i broja c . Analogno i za par (a, c) , odnosno (b, c) .

Dokazaćemo da prosti brojevi 2, 3, 5 nisu djeloci broja c , odakle slijedi traženo tvrđenje.

Pretpostavimo da $2|c$. Kako je $\text{nzd}(a, c) = 1$ i $\text{nzd}(b, c) = 1$, slijedi da su brojevi a i b neparni, odakle zaključujemo da je $a^2 + ab + b^2$ neparan broj, što nije moguće.

Pretpostavimo da $3|c$. Dati uslov zapisujemo u obliku zbira kvadrata na sljedeći način:

$$c^2 = a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2,$$

odnosno

$$4c^2 = (2a + b)^2 + 3b^2. \quad (2)$$

Kako 3 dijeli c , tada 3 dijeli $(2a + b)^2$, odnosno dijeli i $(2a + b)$. Međutim, u tom slučaju $4c^2$ i $(2a + b)^2$ su djeljivi sa 9, odakle slijedi da $3|b^2$, odnosno $3|b$, što nije moguće jer $\text{nzd}(b, c) = 1$.

Pretpostavimo da $5|c$. Kako kvadrat prirodnog broja daje ostatak 0, 1 ili 4 pri dijeljenju sa 5, to slijedi da $(2a + b)^2$ daje ostatak 0, 1 ili 4, dok $3b^2$ daje ostatak 0, 3 ili 2 pri dijeljenju sa 5. U svim tim slučajevima desna strana jednakosti (2) nije djeljiva sa 5, osim kada oba sabirka daju ostatak 0 pri dijeljenju sa 5. Međutim, taj slučaj nije moguć jer bi tada važilo $\text{nzd}(b, c) \geq 5$.

Dakle, svi prosti djeloci, pa samim tim i svi djeloci broja c su strogo veći od 5.

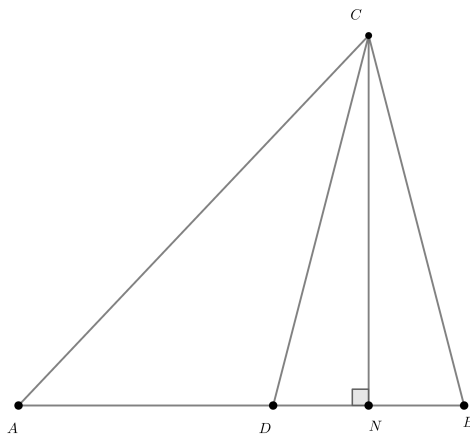
Napomena: Ni broj 6 ne dijeli c , jer 2 i 3 ne dijele c . Primijetimo da $(a, b, c) = (3, 5, 7)$ zadovoljava uslov.

4. U trouglu ABC simetrala ugla $\angle ACB$ siječe stranicu AB u tački D . Ako je $|CB| = |CD|$, $|AD| = 4$ i $|BD| = 3$, odrediti $|AC|$.

Rješenje:

Iz uslova zadatka se dobija da je $|AC| : |BC| = |AD| : |BD| = 4 : 3$, odakle slijedi da je $|AC| = 4x$ i $|BC| = 3x$. Neka je N podnožje visine iz tjemena C trougla ABC . Kako je $|AC|^2 = |AN|^2 + |CN|^2$ i $|BC|^2 = |CN|^2 + |NB|^2$ to je

$$|AC|^2 - |BC|^2 = |AN|^2 - |BN|^2. \quad (3)$$



Imamo da je $\triangle BCD$ jednakokraki i CN je njegova visina, pa je $|BN| = |DN| = \frac{3}{2}$. Zato je

$$|AN| = |AD| + |DN| = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Iz (3) se dobija

$$16x^2 - 9x^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 28,$$

odnosno $x = 2$, pa je $|AC| = 8$.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024
MATEMATIKA
za III razred srednje škole

1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, $n \geq 3$. Dokazati da važi

$$\frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})} \leq \sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) \leq \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})}.$$

2. U ravni je dato 2024 različitih tačaka tako da za bilo koje četiri tačke postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2. Dokazati da postoji krug poluprečnika 2 koji sadrži barem 675 datih tačaka.
3. Niz (x_n) dat je rekurzivnom formulom $x_n = 5x_{n-1} + 7$.
a) Odrediti $a \in \mathbf{R}$, tako da se niz (y_n) , koji je dat sa $y_n = x_n + a$, svodi na geometrijski niz.
b) Ako je $x_1 = 1$, pokazati da je x_{2024} prirodan broj i odrediti mu posljednju cifru.
4. Neka je r dužina poluprečnika upisane kružnice trougla ABC . Prava kroz centar te kružnice siječe stranice BC i CA redom u tačkama D i E . Dokazati da za površinu P trougla CED važi

$$P \geq 2r^2.$$

Kada važi jednakost?

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2024

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, $n \geq 3$. Dokazati da važi

$$\frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^{n+1}})} \leq \sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) \leq \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})}.$$

Rješenje:

Polazeći od identiteta

$$\sin x = 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) = 2^2 \sin(\frac{x}{4}) \cos(\frac{x}{4}) \cos(\frac{x}{2}) = \cdots = 2^n \sin(\frac{x}{2^n}) \cos(\frac{x}{2^n}) \cos(\frac{x}{2^{n-1}}) \cdots \cos(\frac{x}{2}),$$

imamo

$$\sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) = \sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})}.$$

Koristeći dalje da je funkcija $f(x) = \sin x$ rastuća na intervalu $[\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, to važe sljedeće nejednakosti

$$\sin(\frac{\pi}{n2^n}) \leq \sin(\frac{x_i}{2^n}) \leq \sin(\frac{\pi}{n2^{n+1}}), \quad \sin(\frac{\pi}{n}) \leq \sin(x_i) \leq 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

što dalje povlači

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})} = \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})},$$

i slično

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})} \geq \sum_{i=1}^n \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^{n+1}})} = \frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^{n+1}})}.$$

2. U ravni je dato 2024 različitih tačaka tako da za bilo koje četiri tačke postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2. Dokazati da postoji krug poluprečnika 2 koji sadrži barem 675 datih tačaka.

Rješenje:

Izaberimo proizvoljnu tačku A od datih 2024 tačaka i formirajmo krug K_1 poluprečnika 2 oko te tačke. Ukoliko se sve tačke nalaze u tom krugu dokaz je gotov. U suprotnom, postoji tačka B van kruga K_1 , dakle na rastojanju većem ili jednakom 2 od tačke A . Formirajmo krug K_2 poluprečnika

2 oko tačke B . Ukoliko se sve tačke nalaze u krugovima K_1 i K_2 , to jedan od ta dva kruga mora sadržati barem $2024 : 2 = 1012$ tačaka, pa je dokaz gotov. U suprotnom, postoji tačka C koja se ne nalazi ni u krugu K_1 ni u krugu K_2 , pa formirajmo krug K_3 poluprečnika 2 oko tačke C . Tvrdimo da se svaka od 2024 tačaka nalazi u nekom od ova tri kruga. Ukoliko bi postojala tačka D koja ne pripada nijednom od ova tri kruga, onda među tačkama A, B, C i D ne postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2, što je suprotno uslovu zadatka. Kako se sve tačke nalaze u tri kruga, to mora da postoji krug koji sadrži barem 675 tačaka. Naime, ako bi svaki od tri kruga pojedinačno sadržao najviše 674 tačaka, to bi ukupan broj tačaka bio najviše $3 \cdot 674 = 2022$. Time je dokaz završen.

3. Niz (x_n) dat je rekurzivnom formulom $x_n = 5x_{n-1} + 7$.

a) Odrediti $a \in \mathbf{R}$, tako da se niz (y_n) , koji je dat sa $y_n = x_n + a$, svodi na geometrijski niz.

b) Ako je $x_1 = 1$, pokazati da je x_{2024} prirodan broj i odrediti mu posljednju cifru.

Rješenje:

a) Uvrštavanjem dobijamo da važi

$$y_n - a = 5(y_{n-1} - a) + 7,$$

odnosno

$$y_n = 5y_{n-1} + (-4a + 7).$$

Očigledno, za $a = \frac{7}{4}$ važi $y_n = 5y_{n-1}$, odnosno niz y_n se svodi na geometrijski niz sa količnikom $q = 5$.

b) Posmatramo geometrijski niz (y_n) dobijen iz a). Iz $x_1 = 1$, imamo $y_1 = 1 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4}$. Odavde slijedi da je

$$y_{2024} = y_1 \cdot q^{2023} = \frac{11}{4} 5^{2023},$$

odnosno

$$x_{2024} = \frac{11}{4} 5^{2023} - \frac{7}{4} = 11 \cdot \frac{5^{2023} - 1}{4} + 1. \quad (1)$$

Kako je

$$\frac{5^{2023} - 1}{4} = \frac{(5 - 1)(5^{2022} + 5^{2021} + \dots + 5 + 1)}{4} = 5^{2022} + 5^{2021} + \dots + 5 + 1,$$

zaključujemo da je x_{2024} prirodan broj i da je posljednja cifra broja $\frac{5^{2023}-1}{4}$ jednaka 1. Iz (1) slijedi da je posljednja cifra broja x_{2024} jednaka 2.

4. Neka je r dužina poluprečnika upisane kružnice trougla ABC . Prava kroz centar te kružnice siječe stranice BC i CA redom u tačkama D i E . Dokazati da za površinu P trougla CED važi

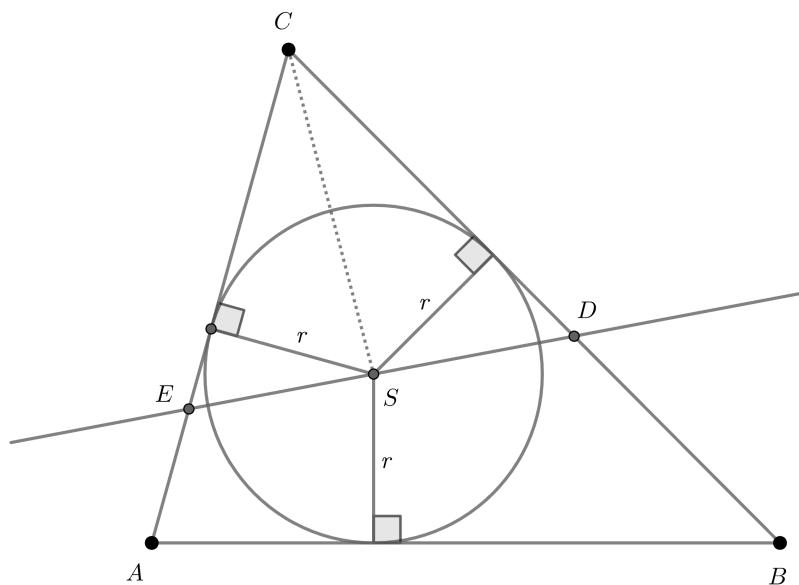
$$P \geq 2r^2.$$

Kada važi jednakost?

Rješenje:

Neka je S centar upisane kružnice trougla ABC . Imamo da važi

$$P = P_{\Delta CES} + P_{\Delta CSD} = \frac{1}{2} CE \cdot r + \frac{1}{2} CD \cdot r = \frac{CE + CD}{2} \cdot r.$$



Kako je

$$\frac{CE + CD}{2} \geq \sqrt{CE \cdot CD}$$

to je

$$P \geq \sqrt{CE \cdot CD} \cdot r. \quad (2)$$

Primijetimo da važi: $2P \leq CD \cdot CE$, što zajedno sa (2) povlači

$$P \geq \sqrt{2P} \cdot r,$$

odnosno

$$P \geq 2r^2.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $CE = CD$ i ugao $\angle ACB$ je prav.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE
OLIMPIJADA ZNANJA 2024
MATEMATIKA
za IV razred srednje škole

1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, $n \geq 3$. Dokazati da važi

$$\frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})} \leq \sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) \leq \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})}.$$

2. Odrediti najveći prirodan broj n tako da je broj

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

djeljiv sa $n + 3$.

3. U ravni je dato 2024 različitih tačaka tako da za bilo koje četiri tačke postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2. Dokazati da postoji krug poluprečnika 2 koji sadrži barem 675 datih tačaka.
4. U trouglu ABC važi $\angle ABC = 2\angle BCA$. Simetrala ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački D tako da je $|AB| = |CD|$. Odrediti ugao $\angle CAB$.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2024

Rješenja iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, $n \geq 3$. Dokazati da važi

$$\frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})} \leq \sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) \leq \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})}.$$

Rješenje:

Polazeći od identiteta

$$\sin x = 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) = 2^2 \sin(\frac{x}{4}) \cos(\frac{x}{4}) \cos(\frac{x}{2}) = \cdots = 2^n \sin(\frac{x}{2^n}) \cos(\frac{x}{2^n}) \cos(\frac{x}{2^{n-1}}) \cdots \cos(\frac{x}{2}),$$

imamo

$$\sum_{i=1}^n \cos(\frac{x_i}{2}) \cos(\frac{x_i}{4}) \cdots \cos(\frac{x_i}{2^n}) = \sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})}.$$

Koristeći dalje da je funkcija $f(x) = \sin x$ rastuća na intervalu $[\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}]$, to važe sljedeće nejednakosti

$$\sin(\frac{\pi}{n2^n}) \leq \sin(\frac{x_i}{2^n}) \leq \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}}), \quad \sin(\frac{\pi}{n}) \leq \sin(x_i) \leq 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

što dalje povlači

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})} = \frac{n}{2^n \sin(\frac{\pi}{n2^n})},$$

i slično

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin(x_i)}{2^n \sin(\frac{x_i}{2^n})} \geq \sum_{i=1}^n \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})} = \frac{n \sin(\frac{\pi}{n})}{2^n \sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})}.$$

2. Odrediti najveći prirodan broj n tako da je broj

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

djeljiv sa $n + 3$.

Rješenje:

Suma $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ je jednaka $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Ako broj $n + 3$ dijeli $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, onda dijeli i $n^2(n+1)^2$. Neka je $n + 3 = m$, tada izraz $n^2(n+1)^2$ dobija oblik

$$m^4 - 10m^3 + 37m^2 - 60m + 36.$$

Kako m dijeli $m^4 - 10m^3 + 37m^2 - 60m + 36$, to $m|36$. Traženje najvećeg broja n , tako da $n + 3$ djeli $n^2(n+1)^2$ se svodi na traženje najvećeg broja m koji dijeli 36.

Ostaje da se provjeri za koje m , odnosno n , broj $n + 3$ dijeli $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Za $m = 36$ imamo $n = 33$. Jednostavno se vidi da 36 ne dijeli $\frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 33^2 \cdot 17^2$.

Sljedeći najveći kandidat je $m = 18$. Tada je $n = 15$. Primijetimo da 18 dijeli

$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 15^2 \cdot 64 = (9 \cdot 2) \cdot (25 \cdot 32).$$

Dakle, najveći broj sa traženim svojstvom je $n = 15$.

3. U ravni je dato 2024 različitih tačaka tako da za bilo koje četiri tačke postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2. Dokazati da postoji krug poluprečnika 2 koji sadrži barem 675 datih tačaka.

Rješenje:

Izaberimo proizvoljnu tačku A od datih 2024 tačaka i formirajmo krug K_1 poluprečnika 2 oko te tačke. Ukoliko se sve tačke nalaze u tom krugu dokaz je gotov. U suprotnom, postoji tačka B van kruga K_1 , dakle na rastojanju većem ili jednakom 2 od tačke A . Formirajmo krug K_2 poluprečnika 2 oko tačke B . Ukoliko se sve tačke nalaze u krugovima K_1 i K_2 , to jedan od ta dva kruga mora sadržati barem $2024 : 2 = 1012$ tačaka, pa je dokaz gotov. U suprotnom, postoji tačka C koja se ne nalazi ni u krugu K_1 ni u krugu K_2 , pa formirajmo krug K_3 poluprečnika 2 oko tačke C . Tvrdimo da se svaka od 2024 tačaka nalazi u nekom od ova tri kruga. Ukoliko bi postojala tačka D koja ne pripada nijednom od ova tri kruga, onda među tačkama A, B, C i D ne postoje dvije koje su na rastojanju manjem od 2, što je suprotno uslovu zadatka. Kako se sve tačke nalaze u tri kruga, to mora da postoji krug koji sadrži barem 675 tačaka. Naime, ako bi svaki od tri kruga pojedinačno sadržao najviše 674 tačaka, to bi ukupan broj tačaka bio najviše $3 \cdot 674 = 2022$. Time je dokaz završen.

4. U trouglu ABC važi $\angle ABC = 2\angle BCA$. Simetrala ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački D tako da je $|AB| = |CD|$. Odrediti ugao $\angle CAB$.

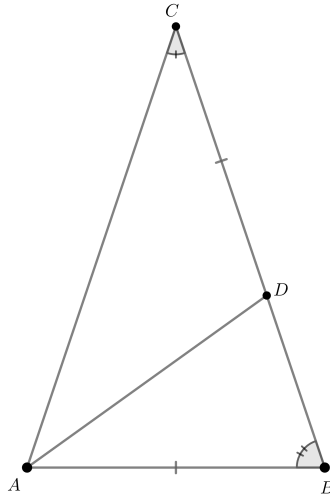
Rješenje:

Neka je $c = |AB| = |CD|$, zatim $\alpha = \angle BAC$ i $\gamma = \angle ACB$. Iz sinusne teoreme primijenjene na $\triangle ACD$ i $\triangle ABD$ dobijamo

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{|AD|}{c}, \quad \frac{\sin 2\gamma}{\sin(\frac{\alpha}{2} + \gamma)} = \frac{|AD|}{c}.$$

Dalje je

$$\sin \gamma \cdot \sin(\frac{\alpha}{2} + \gamma) = \sin 2\gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$



odnosno

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = 2 \cos \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Koristeći adicijonu formulu za sinus zbira, dobijamo

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

odnosno

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Zato je

$$\frac{\alpha}{2} - \gamma = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

a kako se radi o uglovima trougla slijedi da je $k = 0$, odnosno $\frac{\alpha}{2} = \gamma$. Kako je $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \alpha = \pi$ slijedi da je

$$\alpha = \frac{2}{5}\pi.$$